Vorlesung 17:

$$\underset{\text{mxn}-\text{Matrix}}{A}$$

Gleichungen → m, Unbekannte → n

$$A \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

$$\dim(\text{Lös}(A)) = n - \text{Rang}(A)$$

Rezept: Rang bestimmen

Überführe gegebene Matrix $A$ durch EZU in Matrix $\tilde{A}$ in Zeilenstufenform. Dann ist

$\text{Rang}(A) =$ Anzahl der Pivotelemente in $\tilde{A}$

$(\text{Rang}(\tilde{A}) = )$

## Rezept: Matrix invertieren

(3.5 Aufgabe 8)

Sei $A \in M(n \times n; K)$ gegeben.

Überführe $(A \mid E_n)$ durch EZU in $(\tilde{A} \mid B)$ so dass $\tilde{A}$ in Zeilennormalform.

Falls $\tilde{A} = E_n$: $A$ invertierbar mit $A^{-1} = B$.

Falls $\tilde{A} \neq E_n$: $A$ nicht invertierbar.

## Rezept: Ein Linksinverses finden

Sei $A \in M(m \times n; K)$ gegeben.

Überführe $(A \mid E_m)$ durch EZU in $(\tilde{A} \mid B)$ so dass $\tilde{A}$ in Zeilennormalform.

Falls $\tilde{A} = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$: Für $C :=$ oberste $n$ Zeilen von $B$ gilt: $C \cdot A = E_n$.

nur möglich falls $n \leq m$

Falls $\tilde{A} \neq \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$: $\nexists$ Matrix $C$ mit $C \cdot A = E_n$.

$\mathrm{Rang}(A) := \dim \mathrm{Im}(F_A)$

Def (3.1.1 (d)):

Die Transponierte einer $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j}$ ist die $n \times m$-Matrix ${}^tA := (a_{ji})_{i,j}$

Notiz:

(i) ${}^t({}^tA) = A$

(ii) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

(iii) ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$

(iv) $A$ invertierbar $\Leftrightarrow$ ${}^tA$ invertierbar und in dem Fall ist $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

$\underline{v} \in K^n$ Spaltenvektoren

${}^t\underline{v}$ Zeilenvektoren

Def (3.3.2):

$$A = (\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n) = \begin{pmatrix} {}^t\underline{z}_1 \\ \vdots \\ {}^t\underline{z}_m \end{pmatrix} \in M(m \times n; K)$$

$$\text{Spaltenrang}(A) := \dim_K \text{span}(\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n)$$

$$\text{Zeilenrang}(A) := \dim_K \text{span}(\underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_m)$$

Rangsatz (3.6.6):

Für jede Matrix gilt:

$$\underset{\dim(\operatorname{Im} F_A)}{\text{Rang}} \overset{1}{=} \text{Spaltenrang} \overset{2}{=} \text{Zeilenrang}$$

Notiz: Für $m \times n$-Matrix $A$ ist

$$\text{Rang}(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Def: $m \times n$-Matrix $A$ hat
<u>vollen Spaltenrang</u>, falls $\text{Rang}(A) = n$
<u>vollen Zeilenrang</u>, falls $\text{Rang}(A) = m$
<u>vollen Rang</u>, falls sie vollen Spaltenrang oder vollen Zeilenrang hat (falls also gilt $\text{Rang}(A) = \min\{m, n\}$)

Satz:
$A$ hat vollen Spaltenrang
$\overset{1}{\Longleftrightarrow}$ $A$ besitzt Linksinverses.
$A$ hat vollen Zeilenrang
$\overset{2}{\Longleftrightarrow}$ $A$ besitzt Rechtsinverses.

Ist $A \in M(n \times n; K)$ (quadratisch) folgt aus dem Satz noch einmal:
$A$ invertierbar $\Longleftrightarrow$ $\text{Rang}(A) = n$
(Vorlesung 17)

Satz:

Eine Familie $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ in $K^m$ ist ...

... linear unabhängig

$\iff$ Matrix $(\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n)$ hat vollen Spaltenrang $(n)$

... ein Erzeugendensystem von $K^m$

$\iff$ Matrix $(\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n)$ hat vollen Zeilenrang $(m)$

... eine Basis von $K^m$

$\iff$ Matrix $(\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n)$ ist invertierbar (insbes. $n = m$)